ESTATÍSTICA I - 2º Ano Economia, Exame Época Recurso 03. 07. 2020

1hora. (cotação 14 valores)

Questões de resposta aberta

Nome:____**Número:**_____

Espaço reservado para classificações					
1a. (10)	2a. (15)	3a. (15)	4. (15)	5a. (10)	6. (15)
	2b. (10)	3b. (10)		5b. (10)	
	2c. (15)	3c. (15)			

Atenção: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. Com base na informação recolhida em anos anteriores, sabe-se que é de 0.001 a probabilidade de um indivíduo, residente numa determinada região, não aderir às campanhas de vacinação anual contra a gripe. Sabendo que nessa região residem 20 mil pessoas, qual a probabilidade de menos de 21 não aderir à campanha?

X −indíviduo não aderir à campanha$\sim B(1, 0.001)$

$$\sum_{i=1}^{20000} X_i \sim B(20000, 0.001) \Rightarrow \sum_{i=1}^{20000} X_i \dot{\sim} Po\left(\underbrace{20000 * 0.001}_{20}\right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i < 21\right) = Pocdf(20,20) = 0.5591$$

2. Seja a variável aleatória X com função distribuição dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3/3 & 0 \leq x < 1 \\ x/3 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

a) Classifique, justificando convenientemente, a variável aleatória X.

$\lim_{x \to 2^-} F_X(x) = \frac{2}{3} \neq \lim_{x \to 2^+} F_X(x) = 1 \Rightarrow F_X(x)$ tem um ponto de descontinuidade em $x = 2$

$\Rightarrow D_X = \{2\} \neq \emptyset$

$P(X = 2) = F_X(2) - F_X(2^-) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} < 1$ então X é uma variável aleatória mista

b) Calcule $P(X > \mu_e | X > 1)$, sendo μ_e a mediana de X .

$$\mu_e: P(X \leq \mu_e) = \frac{1}{2} \Rightarrow F_X(\mu_e) = \frac{\mu_e}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu_e = \frac{3}{2}$$

$$P(X > \mu_e | X > 1) = \frac{P(X > \mu_e)}{P(X > 1)} = \frac{1/2}{1 - F_X(1)} = \frac{1/2}{1 - 1/3} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

c) Determine a função distribuição da variável aleatória $Y = \begin{cases} 0 & X < 0.5 \\ 1 & 0.5 \leq X < 1.5 \\ 2 & X \geq 1.5 \end{cases}$.

$$D_Y = \{0, 1, 2\}$$

$$A_0 = \{x: y = 0\} = \{x: x < 0.5\} \Rightarrow P(Y = 0) = P(X < 0.5) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}$$

$$A_1 = \{x: y = 1\} = \{x: 0.5 \leq x < 1.5\} \Rightarrow P(Y = 1) = P(0.5 \leq X < 1.5) = F_X\left(\frac{3}{2}\right) - F_X\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24}$$

$$A_2 = \{x: y = 2\} = \{x: x \geq 1.5\} \Rightarrow P(Y = 2) = P(X \geq 1.5) = 1 - F_X\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1/24 & 0 \leq y < 1 \\ 12/24 & 1 \leq y < 2 \\ 1 & y \geq 2 \end{cases}$$

3. O tempo que leva a resolver um problema tem distribuição exponencial com média 2 minutos. Dois estudantes, a Inês e o Pedro começaram a resolver o problema ao mesmo tempo. Sejam X e Y respectivamente, os tempos que o Pedro e a Inês levam a resolver o problema. Assuma que os tempos dos dois estudantes são independentes.

a. Qual a probabilidade de pelo menos um dos estudantes resolver o problema num tempo até 2 minutos?

$X -$ tempo, em minutos, que leva a resolver um problema de estatística$\sim Ex(\lambda)$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow P(X > 2) = e^{-\frac{1}{2}*2} = e^{-1} = 0.36787$$

$$P(X < 2) = 1 - P(X > 2) = 0.6321$$

X_i – tempo, em minutos, que estudante i $(i = 1,2)$ leva a resolver o problema

$$P(\text{pelo menos um dos estudantes ter resolvido o problema em menos de 2 minutos})$$
$$= 1 - P(\textit{nenhum estudante ter} \text{ resolvido o problema em menos de 2 minutos })$$

$$= \underbrace{1 - P(X_1 > 2 \cap X_2 > 2) = 1 - P(X_1 > 2) * P(X_2 > 2)}_{porque\ X_1\ e\ X_2\ são\ v.a.(s) independentes}$$

$$= \underbrace{1 - P(X > 2) * P(X > 2)}_{porque\ X_1\ e\ X_2\ são\ i.d.a\ X} = 1 - 0.367879^2 = 0.8647$$

Ou

$Y -$ nº alunos em 2 que resolve o problema em menos de 2 minutos$\sim B\big(2, \theta = P(X < 2)\big)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - F_Y(1^-) = 1 - F_Y(0) = 1 - 0.1354 = 0.8647$$

b. Qual a probabilidade de o Pedro demorar mais de15 minutos para resolver 5 exercícios, do mesmo tipo?

$W -$ tempo, em minutos, que o Pedro leva a resolver 5 exercícios$= \sum_{i=1}^{5} X_i \sim G\left(\frac{1}{2}, 5\right)$

$$P(W > 15) = P\left(2\lambda W > 2 * \frac{1}{2} * 15\right) = P(\chi^2_{10} > 15) = 0.1321$$

c. Calcule a probabilidade de o Pedro levar pelo menos dobro do tempo da Inês a resolver o problema.

Como X e Y são v.a.(s) independentes tem-se:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) * f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} * \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{(x+y)}{2}} \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

$$P(X \geq 2Y) = \int_0^{+\infty}\int_{x/2}^{+\infty} \frac{1}{4}e^{-\frac{(x+y)}{2}}dydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} \int_{x/2}^{+\infty} -\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dydx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\left[-e^{-\frac{y}{2}}\right]_{x/2}^{+\infty}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} * e^{-\frac{x}{4}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{3x}{4}} = \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{4}e^{-\frac{3x}{4}}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

4. Uma nova área residencial está a ser planeada para 1000 famílias. Seja X, a variável que representa o número de carros por família e $f_X(x)$ a respectiva função probabilidade:

x:	0	1	2	3
$f_X(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

Quantos lugares de estacionamento devem ser planeados para que a probabilidade de todos os carros terem lugar de estacionamento seja de 90%?

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x * f_X(x) = 1.3; \quad E(X^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2 * f_X(x) = 2.5;$$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 = 0.81$$

$a -$ total de carros das 1000 famílias

$$a = ?: P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i \geq a\right) = 0.9 \Leftrightarrow P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i < a\right) = 0.1$$

Pelo teorema do limite central:

$$P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i < a\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \underbrace{\frac{a - 1000 * 1.3}{0.9 * \sqrt{1000}}}_{z_\varepsilon}\right) = 0.1$$

$$\Rightarrow z_\varepsilon = norm.s.inv(0.1) = -1.282 \Rightarrow \frac{a - 1000 * 1.3}{0.9 * \sqrt{1000}} = -1.282 \Leftrightarrow a = 1263.514$$

Será necessário planear 1264 lugares de estacionamento

5. A Paula foi recentemente contratada por uma empresa de estudos de mercado e começou a passar em revista os seus conhecimentos de estatística. Relativamente a variáveis aleatórias com distribuição normal, de que se extrai uma amostra aleatória com 16 elementos, colocou a si própria as seguintes questões:

a) Qual a probabilidade de obter uma variância corrigida da amostra superior à variância da população?

$$P(S'^2 > \sigma^2) = P\left(\frac{S'^2}{\sigma^2} > 1\right) = P\left((n-1)\frac{S'^2}{\sigma^2} > 15\right) = P(\chi^2_{15} > 15) = 0.4514$$

b) Se a variância corrigida da amostra for igual a 4, qual a probabilidade de a média da amostra exceder em duas unidades a média da população?

$$P(\bar{X} > \mu + 2) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{S'/\sqrt{n}} > \frac{\mu + 2 - \mu}{2/\sqrt{16}}\right) = P\left(t_{(15)} > \frac{2}{2/\sqrt{16}}\right) = P\big(t_{(15)} > 4\big)$$

$$= 1 - P\big(t_{(15)} \leq 4\big) = 1 - 0.99942 = 0.0006$$

6. Considere duas urnas A e B, a urna A com 2 bolas pretas e 3 brancas e a urna B com 2 bolas pretas e 2 bolas brancas. Uma experiência aleatória consiste em retirar uma bola da urna A e colocá-la na urna B sem registar a sua cor e, em seguida retirar uma bola da urna B. A bola retirada da urna B é branca. Qual a probabilidade de a bola retirada da urna A ter sido preta?

$P_A -$ retirada de uma bola preta da urna A $\Rightarrow$ $P(P_A) = \frac{2}{5}$

$B_A -$ retirada de uma bola branca da urna A $\Rightarrow$ $P(B_A) = \frac{3}{5}$

$P_B -$ retirada de uma bola preta da urna B $\Rightarrow$ $P(P_B)$

$B_B -$ retirada de uma bola branca da urna B $\Rightarrow$ $P(B_B)$

Se a bola retirada da urna A for preta, então $P(B_B|P_A) = \frac{2}{5}$

Se a bola retirada da urna A for branca, então $P(B_B|B_A) = \frac{3}{5}$

A bola retirada da urna A ou é preta ou é branca⇒ $P_A \cup B_A = 1$ e $P_A \cap B_A = \emptyset$ pelo que P_A e B_A formam uma partição do espaço de resultados, então:

$$P(B_B) = P(B_B|P_A) * P(P_A) + P(B_B|B_A) * P(B_A) = \frac{2}{5} * \frac{2}{5} + \frac{3}{5} * \frac{3}{5} = \frac{13}{25}$$

$$P(P_A|B_B) = \frac{P(B_B|P_A) * P(P_A)}{P(B_B)} = \frac{4/25}{13/25} = \frac{4}{13}$$